

## 【mod の背景/使い方編】

§ 1. 大切な前提知識	・・・ 割り算の基本定理、合同式の性質、負の数の合同、合同方程式	p.2
§ 2. mod の利用 (余りを求める)	・・・ 累乗パターン (余りと一の位)、様々な種類の余り	p.5
§ 3. mod を利用した証明 (倍数)	・・・ 倍数の証明 (多項式)、割り切れないことの証明	p.9
§ 4. mod を利用した証明 (平方数)	・・・ 平方数の剰余、ピタゴラス系問題	p.11

## 【Level Up 編】

§ 5. 不定 1 次方程式の応用 (mod)	・・・ 共通テストでも使えるテクニック	p.15
§ 6. 漸化式と mod	・・・ 漸化式が絡んだ倍数や約数問題、周期性、10 進法問題	p.17
§ 7. 素数と mod	・・・ 難関大で出題された素数問題の典型パターンを紹介	p.20
§ 8. PASSLABO 総合問題	・・・ 自主学習用としてまとめました。	p.24

(好評であれば、mod や整数問題の「旧帝大パターン解説」も実施する予定です。)

## ■学校の先生方へ

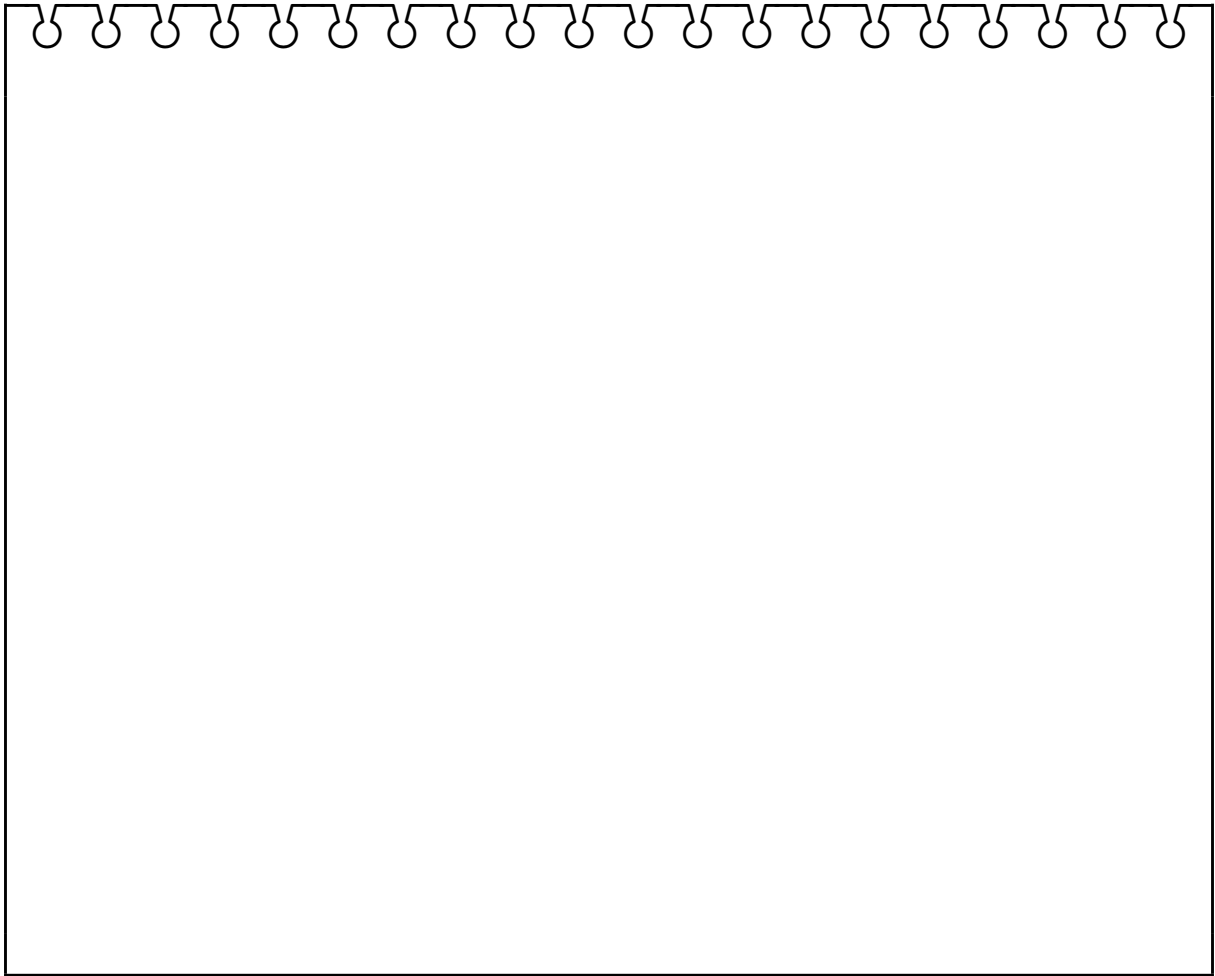
ご覧いただきありがとうございます。PASSLABO の PDF や動画は教育目的であれば、許可なく自由にお使いいただいて構いません。動画の QR コードを載せてプリントにされる先生も多いみたいです。もし今後リクエスト・感想・ご依頼などございましたら下記にご連絡いただけますと幸いです。  
passcalonline@gmail.com

## ■高校生・受験生の方へ (その他視聴者の皆さんへ)

今回の mod 基本解法全パターン解説は、基礎から応用まで体系立って学べるようにこだわって作りこみました。この 1 本で定期テストレベル～難関大レベルまで得点源にできることを約束します。整数問題全パターン解説とセットで何度も見てもらって、遠慮なく PASSLABO を使い倒してください！ (ぜひお友達に広めてもらえると嬉しいです。リクエストや今回の感想などは各種 SNS 等で自由に教えてください。) 受験生に役立つ動画をこれからも全力で作っていきます！PASSLABO と一緒に頑張りましょう！

## § 1. 大切な前提知識

### ① 割り算の基本定理

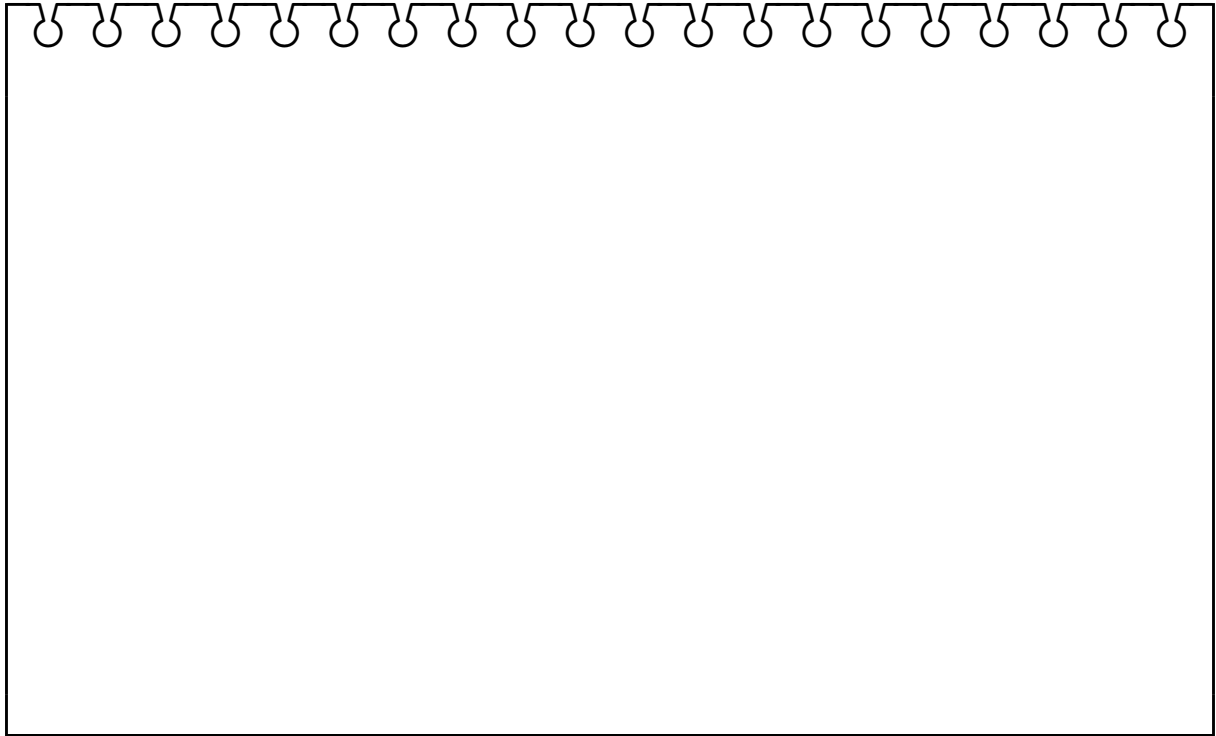


例 1) 19 を 7 で割った商と余りは?

例 2)  $-19$  を 7 で割った商と余りは?

例 3)  $-19$  を  $-7$  で割った商と余りは?

②合同式の基本性質/負の数の合同



例 4) 次の合同式が成り立つかどうかを答えよ。

(1)  $13 \equiv 28 \pmod{5}$

(2)  $36 \equiv 0 \pmod{8}$

(3)  $579 \equiv 27 \pmod{8}$

(4)  $28 \equiv 128 \pmod{3}$

例 5) 次の□に当てはまる 2 桁の自然数を、小さい方から順に 3 つ答えよ。

(1)  $5 \equiv \square \pmod{6}$

(2)  $7 \equiv \square \pmod{11}$

(3)  $27 \equiv \square \pmod{4}$

(4)  $42 \equiv \square \pmod{4}$

例 6) 次の□に当てはまる負の整数を、大きい方から順に 3 つ答えよ。

(1)  $2 \equiv \square \pmod{8}$

(2)  $18 \equiv \square \pmod{3}$

(3)  $38 \equiv \square \pmod{4}$

(4)  $102 \equiv \square \pmod{14}$

③合同方程式の解き方

例7) 次の合同方程式を解け。

(=次式を満たす  $x$  を、それぞれの法において、 $x \equiv a \pmod{m}$  [ $a$  は  $m$  より小さい自然数] の形で表せ。)

(1)  $x + 3 \equiv 1 \pmod{8}$

(2)  $3x \equiv 2 \pmod{5}$

(3)  $4x \equiv 2 \pmod{6}$

(4)  $4x \equiv 5 \pmod{11}$

(5)  $6x + 2 \equiv 5 \pmod{9}$

例8)  $a$  と  $m$  が互いに素のとき、 $ax \equiv ay \pmod{m} \Rightarrow x \equiv y \pmod{m}$  を証明せよ。

## § 2. mod の利用 (余りを求める)

### 01 余りの性質

$a, b$  は整数とする。 $a$  は 5 で割ると 2 余り、 $a^2 - b$  を 5 で割ると 3 余る。このとき、次の数を 5 で割った余りを求めよ。

(1)  $b$

(2)  $4a - 3b$

(3)  $b^2 - 2a$

(4)  $a^{2022}$

02 累乗の余り (周期性)

- (1)  $2020^{10}$  を 7 で割った余りを答えよ。
- (2)  $3^{2019}$  を 11 で割った余りを答えよ。
- (3)  $7^n$  を 5 で割ったときの余りを求めよ。

(1) 信州大 (2) 西南学院大

03 累乗の余り (一の位)

次の数の一の位を求めよ。

(1)  $47^{2011}$

(2)  $49^{123}$

(3)  $137^{49}$

04 累乗の余り (一の位の証明)

$n, p$  を任意の自然数とするとき、 $n^p$  と  $n^{p+4}$  は一の位が一致することを示せ。

05 様々な種類の余り 1

- (1)  $41 \times 81 \times 135$  を 13 で割ったときの余りを求めなさい。
- (2)  $2^{n+1} + 3^{2n-1}$  を 7 で割ったときの余りを求めよ。
- (3)  $7^{2011} \times 50^{1012}$  を 48 で割ったときの余りを求めよ。
- (4)  $1001^4 + 2002^4 + 3003^4 + 4004^4$  を 5 で割った余りを求めよ。

(1) 名古屋女大



### § 3. mod を利用した証明 (倍数)

06 倍数の証明 1 (文字を含んだ多項式)

$n^5 - n$  は 30 の倍数であることを示せ。(※ 2 通りの方法で解け)

(岡山理科大)

07 倍数の証明 2 (指数を含んだ多項式)

$f(n) = 5^{3n} + 5^{2n} + 5^n + 1$  とする。 $n$  が 4 の倍数でないとき、 $f(n)$  は 13 の倍数であることを示せ。

08 倍数の証明3 (2変数の多項式)

$a, b$  は3で割り切れない整数とする。 $a^4 + a^2b^2 + b^4$  は3で割り切れることを示せ。

(倉敷芸術大)

09 割り切れないことの証明 (文字を含んだ多項式)

$n$  が整数のとき、 $n^2 - n + 1$  は5で割り切れないことを示せ。

(吉備国際大)

## § 4. mod を利用した証明 (平方剰余)

### 10 平方剰余の定番問題

$n$  を自然数とする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1)  $n^2$  を 3 で割ったときの余りは?
- (2)  $n^2$  を 4 で割ったときの余りは?
- (3)  $n^2$  を 5 で割ったときの余りは?
- (4)  $n^2$  を 8 で割ったときの余りは? (数学オリンピックで時々見ます)
- (5)  $n^2$  を 9 で割ったときの余りは? (数学オリンピックで時々見ます)

11 平方剰余の論証問題 1

自然数の 2 乗となっている数を平方数という。 $n$  を自然数とする。次の問いに答えよ。

- (1) 命題「 $n^2$  を 3 で割ったときの余りが 1 ならば、 $n$  を 3 で割ったときの余りは 1 である」は偽であることを示せ。
- (2) 命題「 $n^2$  を 3 で割ったときの余りが 1 以外であるならば、 $n$  を 3 で割ったときの余りは 1 以外である」は真であることを示せ。
- (3) 命題「 $4n - 1$  は 2 つの平方数の和として表せない」は真であることを示せ。

(広島修道大)

12 平方剰余の論証問題2 (ピタゴラス数)

自然数の組  $(x, y, z)$  が等式  $x^2 + y^2 = z^2$  を満たすとする。  $x$  が偶数、  $y$  が奇数であるとき、  $x$  が4の倍数であることを示せ。

(早稲田大)

13 平方剰余の論証問題2 (プチ応用)

$a, b, c, d$  は正の整数であり、 $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$  を満たすとき、 $d$  が3の倍数でないならば、 $a, b, c$  の中に3の倍数がちょうど2つあることを示せ。

(一橋大)

## § 5. 不定1次方程式の応用 (mod)

14 不定方程式の別解法 (mod)

$37x - 90y = 4$  の整数解を全て求めよ。

15 不定方程式の別解法 (mod)

$22x + 37y = 2$  の整数解を全て求めよ。

16 1次不定方程式の応用系 (中国剰余定理)

3で割ると2余り、5で割ると3余り、7で割ると4余るような自然数 $n$ で最小のものを求めよ。

(解法1)

(解法2)



## § 6. 漸化式 $\times$ mod

17 漸化式と約数/倍数

$a_n = n^2(n^2 + 8)$  とする。

- (1)  $a_4$  の正の約数の個数を求めよ。
- (2)  $a_n$  は 3 の倍数であることを証明せよ。
- (3)  $a_n$  の正の約数の個数が 10 個であるような  $n$  を全て求めよ。

(徳島大・医)

18 漸化式と余りの周期性

- (1)  $n$  を正の約数とし、 $3^n$  を 10 で割った余りを  $a_n$  とする。 $a_n$  を求めよ。
- (2)  $n$  を正の整数とし、 $3^n$  を 4 で割った余りを  $b_n$  とする。 $b_n$  を求めよ。
- (3) 数列  $\{x_n\}$  を次のように定める。

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 3^{x_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、 $x_{10}$  を 10 で割った余りを求めよ。

(東京大)

19 漸化式 (10 進法) と mod

自然数  $n$  に対して、 $10^n$  を 13 で割った余りを  $a_n$  とおく。  $a_n$  は 0 から 12 までの整数である。

(1)  $a_{n+1}$  は  $10a_n$  を 13 で割った余りに等しいことを示せ。

(2)  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  を求めよ。

(3) 以下の条件を満たす自然数  $N$  をすべて求めよ。

(i)  $N$  を十進法で表示したとき 6 桁となる。

(ii)  $N$  を十進法で表示して、最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 になる。

(iii)  $N$  は 13 で割り切れる。

(九州大)

## § 7. 素数 $\times$ mod

20 素数が絡んだ入試問題 1

$n$  は自然数とする。 $n, n + 2, n + 4$  が全て素数であるのは、 $n = 3$  の場合だけであることを示せ。

(早稲田大)

21 素数が絡んだ入試問題 2

3つの整数  $n + 1, n^2 + 2, n^3 + 3$  がすべて素数となるような正の整数  $n$  は存在しないことを証明せよ。

(大阪大)

22 素数が絡んだ入試問題 3

$n, n^2 + 2$  がともに素数となるような自然数  $n$  の値をすべて求めよ。

(京都大)

23 素数が絡んだ入試問題4 (様々な解法を知ろう！)

$n^3 - 7n + 9$  が素数となるような整数  $n$  の値をすべて求めよ。

(京都大)

## § 8. PASSLABO 総合問題

50 本以上の整数問題

[https://youtube.com/playlist?list=PLYlAoLxVW0A10BEMU\\_eq8RP\\_d1IFiDxrz](https://youtube.com/playlist?list=PLYlAoLxVW0A10BEMU_eq8RP_d1IFiDxrz)

(この講義を受けた後、毎日1本解いてみてください。相当整数の力が身に付くはずです！)

\*本問の解答解説に関しては動画をご覧ください。

(動画視聴後アンケートに回答された方に解説 PDF を期間限定でお渡し予定。詳しくは動画内でお伝えします。)

mod を活用して解く PASSLABO/MathLABO 動画 (問題+解説 URL)

24 【正答率鬼低】最恐の整数問題キミは解けるか?!

$a^2 + b^2 = 1224$  を満たす自然数の組  $(a, b)$  を全て求めよ。

<https://youtu.be/B8sHhZRaj04>

25 整数問題の史上最高傑作【1つのミスが命取り】

$a^2 + b^2 + c^2 = 292$  を満たす自然数の組  $(a, b, c)$  を求めよ。

<https://youtu.be/90Xdzn6hby0>

26 伝説の数学オリンピック 整数問題【鮮やかすぎる新解法】

$2^a + 3^b + 1 = 6^c$  を満たすとき、自然数の組  $(a, b, c)$  をすべて求めよ。

<https://youtu.be/2n5aqQPcfHQ>

27 至高の整数問題【大学への数学 最難 D ランク】

$3^n = k^2 - 40$  を満たす正の整数の組  $(k, n)$  をすべて求めよ。

[https://youtu.be/VeUfixEHZ\\_s](https://youtu.be/VeUfixEHZ_s)

28 【面白い自作問題】鉄緑会から挑戦状が届きました

$1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 2022^{2022}$  を 5 で割った余りを答えよ。

<https://youtu.be/V7nQzhlcmq0>

29 面白いピタゴラス数の証明問題 (mod の勉強法)

$a, b, c$  を自然数とする。 $a^2 + b^2 = c^2$  を満たすとき、積  $ab$  が 12 の倍数であることを示せ。

[https://youtu.be/hN\\_3StS\\_uGU](https://youtu.be/hN_3StS_uGU)