

PASSLABO 特別企画 **整数×数列/漸化式 基本解法パターン全解説**

【旧帝大レベルの厳選された良問 10 題から、学びを en × タメに!】

過去 25 年分の旧帝大+一橋大, 千葉大を分析し、合否を分ける良問を 10 題厳選して解説しました。
動画では初見問題の考え方やアプローチを丁寧に解説しました。必ず予習をしてからご覧ください。

§ 1. 整数×数列/漸化式の基本解法と考え方 p.2

§ 2. 整数×数列のアプローチ p.3

(1) 大阪大 1999 (文系)

(2) 京都大 2002 (文系)

§ 3. 整数×漸化式の様々な証明アプローチ p.5

(3) 千葉大 2012 (理系)

(4) 京都大 2013 (理系)

(5) 東京大 2015 (理系)

(6) 一橋大 2019

(7) 一橋大 2021

§ 4. 整数×漸化式と mod/最大公約数 (互除法) p.10

(8) 九州大 2014 (文理共通)

(9) 東京大 2017 (文理共通)

(10) 東京大 2022 (文系) →理系の問題も解いてみて!

(体系化のために mod や整数問題の「全パターン解説」もセットでご覧いただくことをお勧めします。)

■学校の先生方へ

ご覧いただきありがとうございます。PASSLABO の PDF や動画は教育目的であれば、許可なく自由にお使いいただけます。動画の QR コードを載せてプリントにされる先生も多いみたいです。もし今後リクエスト・感想・ご依頼などございましたら下記にご連絡いただけますと幸いです。

passcalonline@gmail.com

■高校生・受験生の方へ (その他視聴者の皆さんへ)

今回の整数×数列/漸化式の基本解法パターン全解説は、標準から応用まで体系立って学べるようこだわって作りこみました。他の整数問題全パターン解説や再生リストの動画と一緒に見ていただくことで、最難関大レベルまで得点源にできることを約束します。融合問題や初見問題の「考え方」や「アプローチの仕方」も丁寧に解説しました。ぜひ遠慮なく PASSLABO を使い倒してください! (ぜひお友達に広めてもらえると嬉しいです。リクエストや今回の感想などは各種 SNS 等で自由に教えてください。)

受験生に役立つ動画をこれからも全力で作っていきます! PASSLABO と一緒に頑張りましょう!

§ 1. 整数×数列/漸化式の基本解法と考え方

■整数問題の基本3大解法 + 応用深掘り（例題もセットで説明できるように）

①

②

③

■数列や漸化式を絡んだ整数問題の場合、大切な考え方とアプローチ（特に難関大の場合）

Q. なぜ整数問題なのにわざわざ漸化式が出てくるのか？

Q. 整数問題×漸化式で絡むパターンとして重要な考え方+アプローチは？

Q. 初見問題で、基本解法を使えない/使いづらい時にやるべきアプローチは？

§ 2. 整数×数列のアプローチ

01 因数分解型の解法+数列（基礎）の融合問題

正の整数の組 (a, b) で、 a 以上 b 以下の整数の総和が 500 となるものをすべて求めよ。ただし、 $a < b$ とする。

(大阪大・文)

02 初見問題のアプローチ (実験+推測→絞り込み)

4個の整数 $1, a, b, c$ は $1 < a < b < c$ を満たしている。これらの中から相異なる2個を取り出して和を作ると、 $1 + a$ から $b + c$ までのすべての整数の値が得られるという。 a, b, c の値を求めよ。

(京都大・文)

§ 3. 整数×漸化式の様々な証明アプローチ

03 漸化式の整数条件の証明 (必要十分条件)

すべての項が整数である数列を整数列という。 p, q, r, s を実数とし、正の整数 n に対し

$$a_n = p + qn + rn^2, \quad b_n = p + qn + rn^2 + sn^3$$

とおく。このとき以下の命題を示せ。

- (1) 数列 $\{a_n\}$ が整数列ならば、 $2r$ は整数である。
- (2) 数列 $\{b_n\}$ が整数列であるための必要十分条件は、 p と $q+r+s$ と $2r$ と $6s$ がいずれも整数となることである。

(千葉大・理)

04 整式の割り算の余りと証明 (漸化式の設定)

n を自然数とし、整式 x^n を整式 $x^2 - 2x - 1$ で割った余りを $ax + b$ とする。このとき a と b は整数であり、さらにそれらをともに割り切る素数は存在しないことを示せ。

(京都大・理)

05 複雑な漸化式と証明問題

数列 $\{p_n\}$ を次のように定める。

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 2, \quad p_{n+2} = \frac{p_{n+1}^2 + 1}{p_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) $\frac{p_{n+1}^2 + p_n^2 + 1}{p_{n+1}p_n}$ が n によらないことを示せ。
- (2) すべての $n = 2, 3, 4, \dots$ に対し、 $p_{n+1} + p_{n-1}$ を p_n のみを使って表せ。
- (3) 数列 $\{q_n\}$ を次のように定める。

$$q_1 = 1, \quad q_2 = 1, \quad q_{n+2} = q_{n+1} + q_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

すべての $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し、 $p_n = q_{2n-1}$ を示せ。

(東京大・理)

06 漸化式と平方数を絡めた実験アプローチ

p を自然数とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_2 = p^2, \quad a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + 13 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。数列 $\{a_n\}$ に平方数でない項が存在することを示せ。

(一橋大)

07 融合問題 (漸化式×ガウス記号×シグマ計算)

実数 x に対し、 x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_k = 2^{[\sqrt{k}]} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義する。正の整数 n に対して、

$$b_n = \sum_{k=1}^{n^2} a_k$$

を求めよ。

(一橋大)

§ 4. 整数×漸化式と mod/最大公約数 (互除法)

08 mod × 漸化式 × 無限降下法 (有名問題)

- (1) 任意の自然数 a に対し、 a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ。
- (2) 自然数 a, b, c が $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たすと仮定すると、 a, b, c はすべて 3 で割り切れなければならないことを証明せよ。
- (3) $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たす自然数 a, b, c は存在しないことを証明せよ。

(九州大・文理共通)

09 数列と漸化式の融合問題 (最大公約数/互除法)

$p = 2 + \sqrt{5}$ とおき、自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、

$$a_n = p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

と定める。以下の問いに答えよ。ただし、設問 (1) は結論のみを書けばよい。

- (1) a_1, a_2 の値を求めよ。
- (2) $n \geq 2$ とする。積 $a_1 a_n$ を、 a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。
- (3) a_n は自然数であることを示せ。
- (4) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。

(東京大・文理共通)

10 剰余による分類と漸化式 (最大公約数)

数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} = a_n^2 + n(n+2) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) a_{2022} を 3 で割った余りを求めよ。
- (2) $a_{2022}, a_{2023}, a_{2024}$ の最大公約数を求めよ。

(東京大・文)

§ 5. PASSLABO 総合問題

50 本以上の整数問題

https://youtube.com/playlist?list=PLYlAoLxVWOA1OBEMU_eq8RP_d1IFiDxrz

(この講義を受けた後、毎日1本解いてみてください。相当整数の力が身に付くはずですよ！)

*本問の解答解説に関しては動画をご覧ください。

(動画視聴後アンケートに回答された方に解説 PDF を期間限定でお渡し予定。詳しくは動画内でお伝えします。)

mod を活用して解く PASSLABO/MathLABO 動画 (問題 + 解説 URL)

【正答率鬼低】最恐の整数問題キミは解けるか？！

$$a^2 + b^2 = 1224 \text{ を満たす自然数の組 } (a, b) \text{ を全て求めよ。}$$

<https://youtu.be/B8sHhZRaj04>

整数問題の史上最高傑作【1つのミスが命取り】

$$a^2 + b^2 + c^2 = 292 \text{ を満たす自然数の組 } (a, b, c) \text{ を求めよ。}$$

<https://youtu.be/90Xdzn6hby0>

伝説の数学オリンピック 整数問題【鮮やかすぎる新解法】

$$2^a + 3^b + 1 = 6^c \text{ を満たすとき、自然数の組 } (a, b, c) \text{ をすべて求めよ。}$$

<https://youtu.be/2n5aqQPcfHQ>

至高の整数問題【大学への数学 最難 D ランク】

$$3^n = k^2 - 40 \text{ を満たす正の整数の組 } (k, n) \text{ をすべて求めよ。}$$

https://youtu.be/VeUfixEHZ_s

【面白い自作問題】鉄緑会から挑戦状が届きました

$$1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 2022^{2022} \text{ を } 5 \text{ で割った余りを答えよ。}$$

<https://youtu.be/V7nQzhlcmq0>

面白いピタゴラス数の証明問題 (mod の勉強法)

$$a, b, c \text{ を自然数とする。} a^2 + b^2 = c^2 \text{ を満たすとき、積 } ab \text{ が } 12 \text{ の倍数であることを示せ。}$$

https://youtu.be/hN_3StS_uGU