

【基礎編】

§ 1. 整数の基本性質 . . . 整数の性質, 約数の個数, 最大公約数, 素因数分解

§ 2. 積に変形パターン . . . 1次不定方程式, 積の形に変形パターン (素数関連)

§ 3. 条件から範囲を絞る (評価) . . . 存在条件, 大小評価, 分数形の整数問題

§ 4. 倍数と約数に注目 . . . 連続整数の積, 倍数の証明関連 (「互いに素」関連も)

§ 5. 余りに注目 (mod の解法) . . . 余りと合同式, 剰余類, 平方の剰余 (mod 3, 4)

【応用編】

§ 6. 論証と整数 . . . 背理法, 素数の存在論証 (京大好き問題), 部屋割り論法

§ 7. 方程式と整数 . . . 方程式の性質, 整数解, 有理数解

§ 8. 数列と整数 . . . 数学的帰納法関連, 実験思考問題, 整数と漸化式

§ 9. 図形と整数 . . . 一橋大学が好きな整数問題パターン

§ 10. 総合問題 (PASSLABO) . . . PASSLABO 厳選 総合問題 40 + 5 選

§ 1. 整数の基本性質

整数の性質

[01] \sqrt{n} の整数部分が 50 であるような自然数 n は何個あるか。

(立教大)

倍数・約数の個数

[02] 12^n の正の約数の個数が 28 個となるような自然数 n を求めよ。

(慶應義塾大)

最大公約数・最小公倍数

[03] 1829 と 2077 の最大公約数 G と最小公倍数 L を求めよ。

素因数分解①

[04] $\frac{n}{144}$ が 1 より小さい既約分数となるような自然数 n は全部で何個か。

素因数分解②

[05] $50!$ を素因数分解したとき, 累乗 2^a の指数 a を求めよ。

§ 2. 積に変形パターン

1次不定方程式

[06] $25m + 17n = 1623$ を満たす整数 m, n を求めよ。

(慶應義塾大)

積の形に変形①

[07] $xy = 4x - y + 28$ を満たす自然数の組 (x, y) は全部で何組あるか

(上智大)

積の形に変形②

[08] $x \geq y$ のとき, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$ を満たす自然数の組 (x, y) を求めよ。

(立教大)

積の形に変形③

[09] $\sqrt{n^2 + 27}$ が整数であるような自然数 n を全て求めよ。

積の形に変形④（素数関連） ※減点注意

[10] m を自然数とする。 $P = m^3 - 4m^2 - 4m - 5$ が素数となるとき、 P の値を求めよ。

§ 3. 条件から範囲を絞る (評価)

存在条件①

[11] $x^2 + 6y^2 = 360$ を満たす自然数 x, y の値を求めよ。

(上智大)

存在条件②

[12] $5x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 4y + 7 = 0$ を満たす整数の組 (x, y) の値を求めよ

大小評価

[13] $x^2 + xy + y^2 = 12$ を満たす自然数の組 (x, y) ($x \leq y$)の値を求めよ

(駒澤大)

分数型の整数問題①

[14] $\frac{4x}{x^2 + 2x + 2}$ が整数となるような整数 x を求めよ。

(東北学院大)

分数型の整数問題②

[15] a, b を自然数とする。任意の自然数 n に対して、 $\frac{n^3 + an - 2}{n^2 + bn + 2}$ の値が整数となるように、

a, b の値を定めよ。

(高知大)

§ 4. 倍数と約数に注目

[16] 整数 n に対して, $2n^3 - 3n^2 + n$ が 6 の倍数であることを示せ。

[17] n を奇数とする。次の問いに答えよ。

- (1) $n^2 - 1$ は 8 の倍数であることを証明せよ。
- (2) $n^5 - n$ は 3 の倍数であることを証明せよ。
- (3) $n^5 - n$ は 120 の倍数であることを証明せよ。

(千葉大)

[18] 自然数 a, b, c, d は $c = 4a + 7b$, $d = 3a + 4b$ を満たしているものとする。

(1) $c + 3d$ が 5 の倍数ならば $2a + b$ も 5 の倍数であることを示せ。

(2) a と b が互いに素で, c と d がどちらも素数 p の倍数ならば, $p = 5$ であることを示せ。

(千葉大)

§ 5. 余りに注目(mod の解法)

[19] 2000^{2000} を 12 で割ったときの余りを求めよ。

(早稲田大)

[20] n を自然数とする。 $13^n - 8^n - 5^n$ は 40 の倍数であることを証明せよ。

[21] n を自然数とする。 $n^3 + 2n + 1$ を 3 で割ると 1 余ることを証明せよ。

(東京女子大)

[22] どのような整数 n に対しても、 $n^2 + n + 1$ は 5 で割り切れないことを示せ。

(学習院大)

[23] どの2つも互いに素である自然数 a, b, c について, $a^2 + b^2 = c^2$ が成り立つとき

- (1) c は奇数であることを示せ。
- (2) a と b の一方は3の倍数であることを示せ。
- (3) a と b の一方は4の倍数であることを示せ。

(関西学院大)

§ 6. 論証と整数

- [24] a, b は 2 以上の整数とするとき, $a^b - 1$ が素数ならば, $a = 2$ であり, b は素数であることを証明せよ。

[25] 2以上の自然数 n に対し, n と $n^2 + 2$ がともに素数になるのは $n = 3$ に限ることを示せ。

(京都大)

[類題] $n^3 - 7n + 9$ が素数になる自然数 n を全て求めよ。

(京都大)

[26] 任意の異なる4つの整数から適当に2つの整数を選べば、その差が3の倍数となることを証明せよ。

(神戸大)

§ 7. 方程式と整数

[27] 多項式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c は実数) を考える。

(1) $f(-1), f(0), f(1)$ が全て整数ならば, 全ての整数 n に対し, $f(n)$ は整数であることを示せ。

(2) $f(1996), f(1997), f(1998)$ が全て整数の場合でも同じことが言えることを示せ。

(名古屋大)

[28] 100 以下の自然数 m のうち, 2 次方程式 $x^2 - x - m = 0$ の 2 つの解がともに整数であるような m は全部で何個あるか。

(慶應義塾大)

[29]

(1) a, b, c を整数とする。 x に関する 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ が有理数の解を持つならば、その解は整数であることを示せ。

(2) 方程式 $x^3 + 2x^2 + 2 = 0$ は、有理数の解を持たないことを示せ。

(神戸大)

§ 8. 数列と整数

[30] 5以上のすべての自然数に対して, $2^n \geq n^2 + n$ が成立することを証明せよ。

[31] 整数 $a_n = 19^n + (-1)^{n-1}2^{4n-3}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) のすべてを割り切る素数を求めよ。

(東京工業大)

[32] 整数からなる数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$\begin{cases} a_1 = 1, & a_2 = 3 \\ a_{n+2} = 3a_{n+1} - 7a_n & (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

によって定める。

- (1) a_n が偶数となる n を決定せよ。
- (2) a_n が10の倍数となるための n の条件を求めよ。

(東京大)

§ 9. 図形と整数

[33] 直角を挟む 2 辺の長さが a, b の直角三角形がある。内接円の半径を r とする。

(1) r を a, b で表せ。

(2) a, b を整数とし, $a < b$, $r = 5$ とする。このような a, b の組をすべて求めよ。

(一橋大)

[34] 三角形 ABC の 3 つの内角をそれぞれ A, B, C で表す。

$\tan A, \tan B, \tan C$ がすべて整数のとき, $\tan A, \tan B, \tan C$ の値を求めよ。

(一橋大)

[35] 三角形 ABC において、 $\angle B=60^\circ$, $\angle B$ の対辺の長さ b は整数, 他の 2 辺の長さ a, c はいずれも素数である。このとき三角形 ABC は正三角形であることを示せ。

(京都大)

§ 10. PASSLABO 総合問題

[40 本以上の整数問題]

https://youtube.com/playlist?list=PLYIAoLxVWOAIOBEMU_eq8RP_d1IFiDxrz

(この講義を受けた後、毎日1本解いてみてください。相当整数の力が身に付くはずです!)

* 本問の解答解説に関しては動画をご覧ください。

(動画視聴された方に解説 PDF を期間限定でお渡し予定。詳しくは動画内でお伝えします。)

=====

[整数問題以外の PASSLABO おすすめ問題 5 選]

[36] 東京大学 論証問題 (解法 4 種類)

$x^3 + y^3 + z^3 = xyz$ を満たす正の実数の組 (x, y, z) が存在しないことを示せ。

<https://youtu.be/Y1uAAYsxiws>

[37] 微分禁止 最大最小問題 (解法 3 種類)

$\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^3 + x}$ の最小値を求めよ。 ($x > 0$)

<https://youtu.be/pNluSTBJNJM>

[38] 対称式 計算の裏技 (30 秒で求めよ)

$x + y = 3, xy = 1$ のとき、 $x^5 + y^5, x^7 + y^7$ の値を求めよ。

<https://youtu.be/Oia5q9F9IUU>

[39] 三角関数 10 秒暗算 (解法複数あり)

$\cos 20^\circ \times \cos 40^\circ \times \cos 80^\circ$ の値を求めよ。

<https://youtu.be/pfgLYPVF9PI>

[40] 日本一わかりやすい「確率」の授業 | 東大医学部が解説【京大入試】

サイコロを n 個同時に投げるとき、出た目の数の和が $n + 3$ になる確率を求めよ。

<https://youtu.be/RorXAthqDYc>

=====